自然対流の基礎

１．熱対流とは

熱対流（自然対流あるいは自由対流とも呼ばれる）とは，流体中に温度分布が存在するときに，流体の密度変化により生じる体積力の差が駆動力となり，流体の運動が発生持続する流れを指す．この問題では，慣性項と圧力項を含む流体の運動方程式を解くことに加え，熱が流体の流れによって運ばれる効果もまた同時に考慮しなければならない．つまり，温度分布が流体の運動に影響を与え，その一方で流速分布が温度分布に影響を与える．以下，基礎方程式の紹介，流れ場や温度場の可視化を交えて，幾つか基本的な例を示す．

２．基礎方程式

流体の非圧縮性が仮定できる場合には，熱対流現象を解くための基礎方程式は，流体の連続の式，運動方程式，エネルギー方程式になる．ベクトル式で表現すると次のようになる．

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$$

$$\rho\left\{\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right\}=-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{u}+\rho\vec{g}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\theta=\alpha\nabla^2\theta$$

連続の式は，流体が膨張したり収縮したりしない（密度一定）という仮定のもとで，質量のバランス式を流体の微小部分に対して考慮すると得られる．この運動量の保存方程式は，Navier- Stokesの運動方程式と呼ばれる．左辺は，加速度項を表し，右辺はそれぞれ，圧力項，粘性力項，外力項（重力項）を表す．エネルギー方程式は，熱伝導方程式に対して，新たに熱が対流によって運ばれる効果が左辺に付与されている．基本的には，これら３式を連立方程式として解き，速度，圧力，温度を求めればよい．式の数と未知数の数は対応している．例えば，三次元空間を対象にする場合，解くべき運動方程式の数は３つなので，連続の式とエネルギー式を加えると合計５つとなる．一方，未知数は速度の３成分に加え，圧力および温度の計５つなので，一致している．

さて，熱が流れによって運ばれる効果はすでに，エネルギー方程式の左辺に考慮されている．ところがまだ，温度分布が流速に影響を与える効果が運動方程式の中に考慮されていない．つまり「流体の温度差に起因する密度変化が駆動力になる」という部分が運動方程式の中に組み込まれていない．したがって，密度が温度変化に応じてどのように依存するかということを数式で表現しなければならない．一般には４℃以下の水を除いて，温度が上昇すると流体の密度は小さくなる．また逆に，温度が低くなると密度は大きくなる．流体の種類に応じて，密度の変化の仕方が大きいものもあれば小さいものもある．大きいものは体積膨張率が大きく，それが小さいものは体積膨張率が小さいという．体積膨張率

とは，温度が変化したときに，流体の体積が元の体積に対してどれだけ変化したか，ということを表す指標になる．ここで，注意したいのは，密度の変化と体積の変化はちょうど逆だということである．つまり，密度が大きくなれば体積は減少し，密度が小さくなれば体積は増加する．いずれにしても，圧力一定のもと，温度変化による密度の変化は体積膨張率と関係する．次の式は，体積膨張率の定義を表す．

$$\beta \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)_p$$

ここで，β は体積膨張率，V は比体積，ρ は密度を表す．運動方程式において，密度が関係している項は，加速度項（慣性項）と重力項である．よく用いられている近似方法は，重力項のみに密度の温度依存性を考慮することである．このとき慣性項の密度は一定で温度変化しないとみなす．このような近似法を人名に因んで Boussinesq近似という．最終的に運動方程式は次式のように近似される．

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p' + \frac{\mu}{\rho_0}\nabla^2\vec{u} - \beta\left(\theta - \theta_0\right)\vec{g}$$

下付き添字0は，基準温度 θ_0での物性値（ここでは密度）を示す．この圧力は静水圧を差し引いた変動圧を表す（区別するために，上付き ’を付けている）．これで，重力項が温度の変化を受けるように変形がなされた．以後，この形の項を浮力項と呼ぶことにする．厳密には，流体の密度は，温度だけでなく圧力の影響も受けるが，その効果はほぼ無視できることに注意を促しておく．

３．無次元化と無次元数

熱伝導問題やダクト内流れの問題では，微分方程式をそのまま代数方程式に変換しそのまま解くことが普通である．これは，微分方程式の中に幾つもの項を含まないためである．そして，定常解の形はいつも相似である．しかしながら，ここで扱うような問題では，微分方程式を同時に複数解く必要があり，それゆえ項の数も多い．このような場合は方程式を無次元化して，入力パラメータを減らすことが便利である．また．無次元化することの別の利点としては，各項の比として様々な無次元数が現れ，それぞれの無次元数に特有の物理的意味を解釈できることがあげられる．したがって，この章では，無次元化した方程式をまず紹介し，幾つか例題を示していく．まず，自然対流を解析するための３つの方程式は，最も一般的な無次元化を施すと，次のようになる．

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{U} = -\vec{\nabla} P + Pr \nabla^2 \vec{U} + Ra Pr T \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right) T = \nabla^2 T$$

ここで，Prはプラントル数（Prandtl number），Raはレイリー数（Rayleigh number）と呼ばれる．以下にそれぞれの無次元数の定義を示す.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha},\ Ra = \frac{g\beta\Delta\theta L^3}{\alpha\nu}$$

プラントル数は，動粘性係数と温度伝導率の比を表す．この無次元数は，単に物性値の比になっているので，流体に固有の値をとる．例えば，常温ではおよそ，水は約6，空気は0.7，水銀は0.025である．油は粘性が非常に大きいので，プラントル数は数百という大きな値をとる．一方で，水銀のような液体金属は，一般にプラントル数が小さいので，粘性拡散に比べて熱拡散が支配的な流体である．後で述べる水平面を加熱・冷却するレイリー・ベナール対流のような問題では，対流の発生が温度分布（密度分布）の不安定性から生じるので，レイリー数が大きな意味を持つ．レイリー数は，体膨張係数，温度差，そして代表寸法の３乗に比例するので，温度差が小さくても寸法が大きい場合，レイリー数は大きくなる．この無次元化では，温度伝導率 αを基準に無次元化しているので，計算した結果として得られる無次元の速度はそのままペクレ数（Péclet number）になる．ペクレ数の定義は，次のようになる．

$$Pe = \frac{uL}{\alpha} = Re \cdot Pr$$

ペクレ数は，熱対流の影響と熱拡散の影響の比を表す．一方，レイノルズ数（Reynolds number）は，慣性力と粘性力の比を表す.

例題１　縦に長い鉛直側壁の一方を一定温度で加熱し，対抗する鉛直側壁を一定温度で冷却する時，その両壁に挟まれた流体の速度分布を求めよ．ただし，速度分布は，鉛直方向に変化のない場合を仮定してよいとする．

解説　温度勾配の方向を x軸にとる. 紙面に垂直な方向を y軸とし, 鉛直方向を z軸とする. まず, 問題をさらに単純にするために, y軸方向の流れも変化がないとする. この問題では, 流れは鉛直方向のみであるので，熱は鉛直方向のみに運ばれるため，実質，流れによる熱

移動がないのと同等である．したがって，エネルギー方程式は，熱伝導方程式に帰着される．この場合の定常解は，加熱面と冷却面に挟まれる空間で直線温度分布になる．したがって，熱伝導方程式を解いても良いが，直線温度分布を与えれば良い．加熱面と冷却面でそれぞれ 0.5, -0.5になるような無次元の温度分布とする．また，流れが一方向であるので，連続の式は自動的に満足される．したがって，鉛直方向成分の運動方程式だけを解けば良い．

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + RaT$$

$$T = -X + 0.5$$

ここで，速度分布は，鉛直方向に変化がないとしているので，上記の圧力勾配はゼロになる．したがって，次式が得られる．

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + Ra\left(-X + 0.5\right)$$

この式は，ダクト内流れと相似な形をしている．つまり熱源や圧力勾配の代わりに浮力項になったと解釈できる．ちなみに，速度が Y軸方向にも変化する場合だと，次のようになる．いずれの場合でも数値解析により解くことができる．

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}\right) + Ra\left(-X + 0.5\right)$$

定常解に対して，解析解を得たい場合は，常微分方程式を積分していけばよい．

$$\frac{d^2 W}{dX^2} + Ra\left(-X + \frac{1}{2}\right) = 0$$

X で積分をすると，

$$\frac{dW}{dX} + Ra\left(-\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + C_1\right) = 0$$

もう一度，X で積分すると，

$$W + Ra\left(-\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + C_1 X + C_2\right) = 0$$

境界条件，$X = 0$ で $W = 0$，$X = 1$ で $W = 0$ なので，次式を得る．

$$W=\frac{Ra}{12}X\left(2X-1\right)\left(X-1\right)=0$$

これからわかるように，Ra の値に依らず，速度分布はいつも相似である．言い換えれば，Ra が 10 倍になれば，流速も 10 倍になるだけである．したがって，Ra は，この問題では本質的に重要な訳ではない．後述のように，Ra はエネルギー方程式を解いて，熱が流速によって運ばれる場合にはじめて意義をもつ．この問題では，エネルギー方程式は解く必要はないから，Ra 数は重要ではないことがわかる．

４．Rayleigh 数とは

例題２　正方形断面を持つ容器の一つの鉛直面を加熱，対抗する面を冷却する．その他の水平面は断熱条件とする時，流れ場及び温度場の定常解を求めよ．ただし，流体は油のような高 Pr 数流体とする．

解説　この問題は，例題１と比べて，水平面が存在すること大きな違いである．従って，加熱面から浮力によって上昇した流れは，水平上面にぶつかり，そのままの勢いにより，今度は水平に流れていく．一方，冷却面近傍で冷やされた流体は，水平下面にぶつかり，そのままの勢いにより，水平逆向きに流れ，結果として，容器内で一つの大きな循環流を形成する．したがって，熱は対流によって運ばれ，つまり温度分布は流れ場の影響を受ける．また，流れの方向が２方向であるから，連続の式を満たしながら，圧力分布を求めなければならない．なので，例題４－１と比べて決定的に違うのは，エネルギー方程式を解かなければならないことに加え，連続の式を満たすように圧力場を求めるという二点である．まず，解くべき方程式から眺めよう．

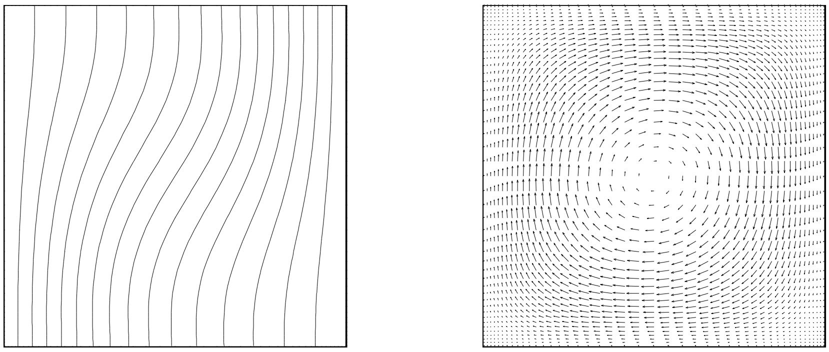
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U}=0$$

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\tau}=-\vec{\nabla}P+\nabla^2\vec{U}+RaT\vec{e}_z$$

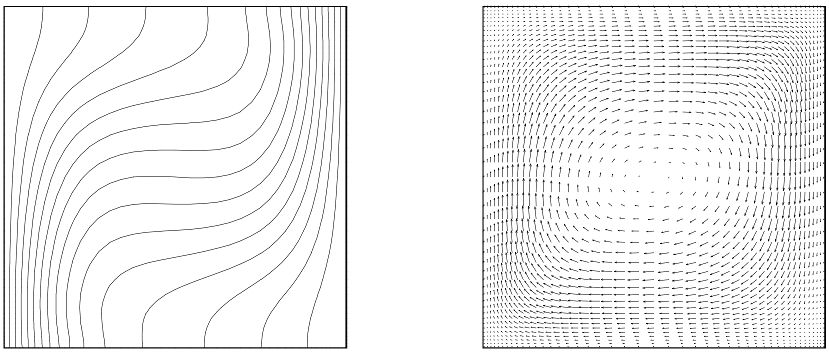
$$\frac{\partial T}{\partial\tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\right)T=\nabla^2 T$$

連続の式とエネルギー方程式に関しては，先に示したのと同じである．運動方程式には，無次元数として，Ra のみが現れる．これは，油のような高プラントル数流体では，陽解法を用いた計算の際，時間刻みを小さくする必要があり，そうでないと計算が発散してしまう．そのため，小さな時間刻みで行なう高プラントル数流体の自然対流の計算は非常に時間がかかることになる．しかし，都合の良いことに，運動方程式の両辺を Pr で割ってやると，Pr が大きい場合には慣性項の影響は無視できることがわかる．別の言い方をすれば，高プラントル数の自然対流は，流速が非常に小さく，流速の２乗で効いてくる慣性項は，他の項と比べて無視できることを意味する．したがって，高プラントル数流体では，Ra のみが自然対流を支配する唯一の無次元数になる．以上のように，Ra は，熱が流速により運ばれてくる影響が考慮されるエネルギー方程式と浮力

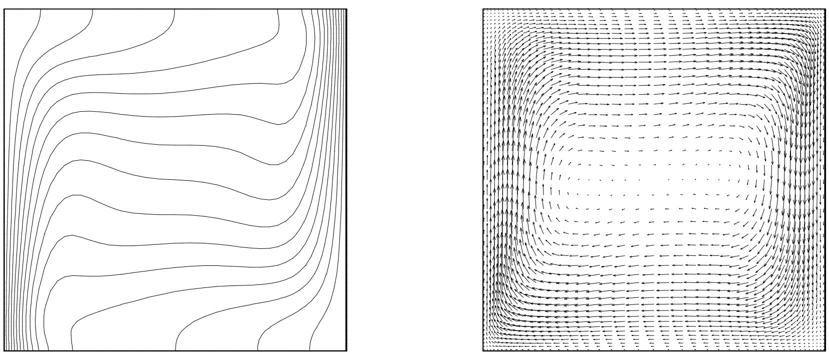
項を含む慣性項の無い運動方程式（Stokes 方程式）の両方を解く時に現れる無次元数であることがわかる．以下に，種々Raを変えて行なった計算結果（温度場と速度場）を示す．



$Ra = 10^3$



$Ra = 10^4$



$Ra = 10^5$

図１　レイリー数による影響（左：等温線分布，右：速度ベクトル）

これらの解析結果は，Ra が 10^3，10^4，10^5 の場合であり，左が温度の等高線を，右は速度ベクトルを描いたものである．Ra が大きくなるに従って，対流による熱の輸送が大きくなる．また，加熱面と冷却面の近くに水平方向の温度勾配の大きい領域が形成されている．それ以外の部分では，温度勾配は鉛直方向になっている．

５．Grashof 数とは

例題３　先ほどの例題２と同様の系で，熱伝導の非常に良い仮想流体（$Pr = 0$）の場合の流速分布を求めよ．

解説　今度は，Pr が極限的にゼロの場合である．動粘性係数は有限で，温度伝導率は無限大とする．実際このような流体は身近には存在しない．液体金属でさえも，Pr は 0.01 のオーダーである．この問題は現実的ではないが，新たに出てくる無次元数の説明のために紹介する．Pr がゼロの場合，熱の伝わりが無限に速いため，たとえどんなに流速が速くても温度分布に変化を及ぼさない．つまり，エネルギー方程式を解く必要がなく，熱伝導方程式を解くことに帰着する．今の問題では，両水平面が共に断熱条件であるから，熱の移動は X 方向に一次元的であり，温度分布は，直線分布になる．エネルギー方程式は，解く必要がなく直線温度分布を与えるものとする．一方で，運動方程式は，次にようになる．

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{U} = -\vec{\nabla}P + \nabla^2\vec{U} + GrT\vec{e}_z$$

この問題では，温度伝導率 α が∞であるので，Ra はゼロになる．無次元化するときの速度の参照値は，動粘度 ν を基準にとっている．したがって，計算して得られる無次元速度は，そのまま Re になる．結局，連続の式を満足させながら，次式を解くことになる．

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{U} = -\vec{\nabla}P + \nabla^2\vec{U} + Gr\left(-X + \frac{1}{2}\right)\vec{e}_z$$

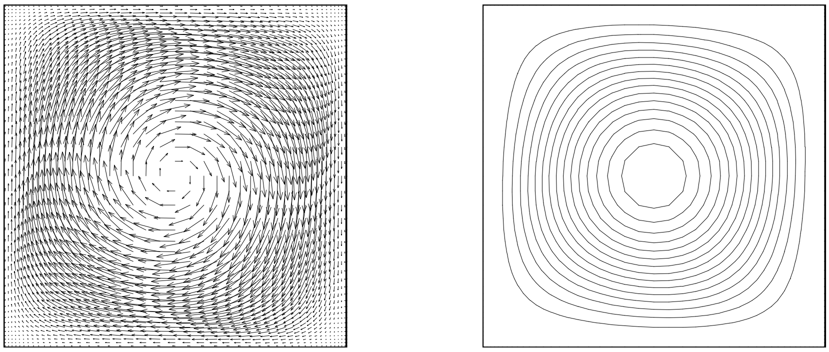
このように，ゼロプラントル数流体の自然対流は，熱伝導方程式と慣性項を含む運動方程式（Navier-Stokes の方程式）を解かなければならない．浮力項に現れる Gr は，グラスホフ数（Grashof number）と呼ばれ，慣性力の影響のある自然対流問題では必ず現れる．一方，先にも述べたが，Ra は，流れ場による熱の輸送が影響する場合に現れる無次元数である．そして，この Ra と Gr の比が Pr になる．

$$Gr = \frac{g\beta\Delta\theta\ell^3}{\nu^2} = \frac{Ra}{Pr}, \text{ or } \; Pr = \frac{Ra}{Gr}$$

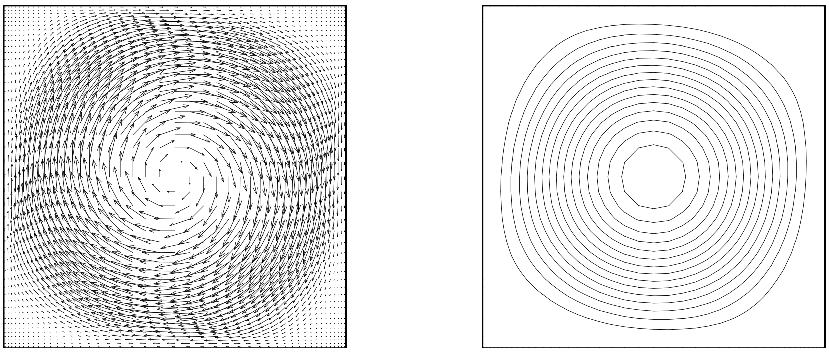
一般の自然対流問題では，慣性項の影響もあるし，対流による熱の輸送もまた同時に起こり得るので，Gr，Ra の両方が支配方程式の中に現れる．ところが，この Gr と Ra は，上記のような関係式で結ばれているので，実際には３つの無次元数の中で，任意の２つを選んで解析すれば良いことになる．ただ，例題２，３のような Pr の極限の場合には，Pr は解析パラメータにならず，Ra のみ，または Gr のみということも考えられる．以上の説明で自然対流に現れる無次元数，

Ra，Gr，Pr のそれぞれの意味が明瞭になったかと思う．

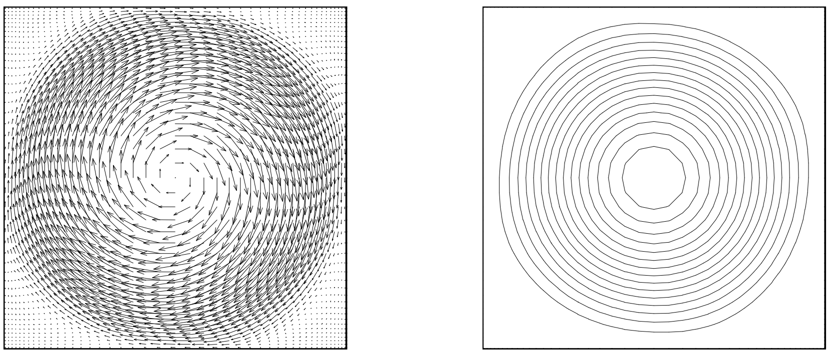
以下に，Gr を種々変えた計算結果を示す．左がベクトル図を，右が流れ関数を示す．流れ関数とは，流れの方向を線で描いたものである．線の間隔が狭いところほど流速が大きいことを表す．Gr が大きくなるほど，丸い循環流れになっている．先ほどの例題２で示した高プラントル数の自然対流と比較して，ゼロプラントル数の自然対流は，流れの様子が大きく異なっている．



$Gr = 10^4$



$Gr = 10^5$



$Gr = 10^6$

図２　グラスホフ数の影響（左：速度ベクトル，右：流線）

6．レイリー・ベナール対流

例題４　矩形密閉容器の水平下面を一定温度で加熱し，対向する水平上面を一定温度で冷却する時，どのような流れが生じるか．

解説　この問題はレイリー・ベナール対流（Rayleigh-Bénard convection）と呼ばれている．ベナールという人が最初に実験し，後にレイリーという人がこの問題を定式化した．この問題では，重力(浮力)の方向と温度勾配の方向が一致しているため，容易には力のモーメントが発生せず，対流が発生するには，系が不安定になることが必要である．浮力が粘性力に打ち勝つほどの温度差が与えられて初めて対流が生じる．このときの臨界値は，*Ra* 値のみより明確に規定され，その臨界値は上下境界面がそれぞれ等温冷却・加熱でかつ滑り無し条件の場合，約 1708 になることが知られる．対流が起きるか起きないかの臨界値付近では，流速は小さく慣性項は無視できるから，*Pr* の値（流体の種類）に関わらず，*Ra* が唯一のパラメータになるのは，先の説明から明らかであろう．ただ，臨界値よりある程度大きい *Ra* では，流速も大きいことが予想され，慣性力，つまり *Pr* の影響も出てくることは想像に難くない．

この問題では，流れは本質的に三次元性を有するが，ここでは二次元を仮定して解いた結果を示す．計算条件は $Ra = 10^4$，$Pr = 1$，上から流れ関数，温度の等高線，速度ベクトルを表す．

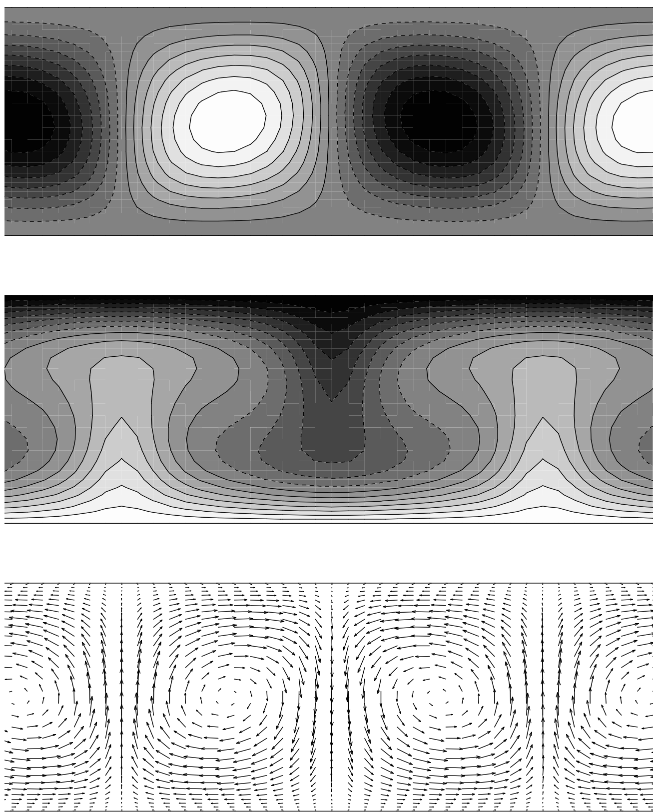


図３　レイリー・ベナール対流の可視化（上：流線，中：温度分布，下：速度ベクトル）